

文章编号:1000-8055(2011)02-0385-07

# 周期对称性在叶盘结构瞬态响应求解中的应用

姚建尧, 王建军

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

**摘 要:** 研究了利用结构周期对称性计算叶盘结构瞬态响应的方法. 首先用 ANSYS 得到扩充扇区的刚度和质量矩阵, 通过周期对称边界上节点的对应关系得到扩充扇区到基本扇区的转换矩阵. 利用叶盘结构中各扇区所受载荷的特点, 得到任意时刻载荷的空间分布, 并对其进行 Fourier 展开, 以得到周期对称模型的载荷. 采用 Newmark 法进行时域积分, 利用多波前法求解线性方程组. 最后以一个叶盘结构的有限元模型作为算例, 验证了文中方法的正确性和有效性.

**关 键 词:** 叶盘结构; 周期对称; 瞬态响应; Fourier 变换; Newmark 方法

**中图分类号:** V231.3

**文献标识码:** A

## Application of cyclic symmetry property in transient forced vibration of bladed disks

YAO Jian-yao, WANG Jian-jun

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** A method for transient response calculation of bladed disks was presented using the cyclic symmetry property of the structure. The stiffness and mass matrices of expanded sector were generated by ANSYS. The transformation matrix from expanded sector to basic sector was obtained using the corresponding nodes on sector boundaries. The load vector for the cyclic symmetric model was obtained from the spatial Fourier transformation of the forces on every sector. The transient responses were calculated using Newmark method, and multi-frontal method was selected as the direct equation solver. A bladed disk with 12 sectors was applied as the numerical example, indicating that the proposed method is effective for transient analysis of bladed disks.

**Key words:** bladed disks; cyclic symmetry; transient response; Fourier transformation; Newmark method

叶盘结构是一种典型的旋转周期对称结构, 每个叶片及其对应的轮盘部分组成叶盘结构的一个基本扇区. 由于工程实际中的叶盘结构的几何形状非常复杂, 相应的有限元模型规模很大, 这给

计算分析带来很多不便. 利用结构的对称性, 只要分析其中一个加以适当边界条件的子结构(一个扇区), 就可以得到整个叶盘的解答, 而不必进行子结构的集成和求解, 从而使整个结构的分析和

**收稿日期:** 2009-12-23; **修订日期:** 2010-07-21

**基金项目:** 国家高技术研究发展计划(2008AA04Z403)

**作者简介:** 姚建尧(1981—), 男, 河北衡水人, 博士生, 主要从事航空发动机结构振动及振动控制等研究.

E-mail: yaojianyao@sjp. buaa. edu. cn

**联系作者:** 王建军(1956—), 男, 江苏苏州人, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事传动系统、航空发动机结构振动及振动控制等研究. E-mail: wangjjb@263. net

求解大大地简化<sup>[1]</sup>.

在结构分析中,基于有限元模型的周期对称性理论工作已经相对比较完善<sup>[2-4]</sup>并已推广至叶盘结构的动态分析中<sup>[5-11]</sup>,在周期对称结构动态特性的研究中,我国学者张锦等人<sup>[6-9]</sup>做出了突出的贡献,但主要集中于模态分析.目前,多数商用有限元软件都有支持周期对称功能的选项,但其周期对称功能一般只包括静力分析,模态分析,静屈曲分析和谐响应分析,而不包括瞬态分析.

对于叶盘结构,多数情况下转子在旋转过程中,各扇区所受的激励的时间历程是相同的,不同扇区之间只存在一个固定的时间差,即如果第  $i$  个扇区所受的激励为  $f(t)$ ,则第  $i+1$  个扇区的激励可表示为  $f(t+\Delta t)$ .这样只需要知道一个扇区的激励的时间历程就可以通过插值得到任意时刻整个叶盘的激励的空间分布,进而可通过激励 Fourier 展开实现整体激励向扇区激励的转化.激励的这种分布特点给周期对称性在叶盘结构瞬态分析中的应用带来很大的方便.

需要指出的是,对于叶盘结构,即使在激励时间空间任意分布的情况下,也可以通过激励转换得到应用于周期对称模型的激励,继续应用一个扇区进行计算分析,同样可以大大减小计算规模,提高计算效率.与目前的叶盘结构分析中较为常用的基于模态减缩的方法<sup>[12-13]</sup>相比,这种利用周期对称性进行模型规模减缩不损失任何计算精度,而且可以考虑各种非线性因素.因此,研究利用周期对称性进行叶盘结构瞬态分析的方法是非常必要的.

本文利用商用有限元软件 ANSYS 的前处理器获取叶盘结构的刚度和质量矩阵,通过矩阵处理,激励转化等过程建立起用一个扇区表示的瞬态分析运动方程,并利用 Newmark 法进行直接积分求解,得到了一个利用结构周期对称性对叶盘结构进行瞬态分析的完整的流程.

## 1 基本扇区的有限元矩阵

### 1.1 矩阵转换关系

记叶盘结构的扇区数为  $N$ ,取其中一个扇区在 ANSYS 中建立有限元模型,可以得到其刚度矩阵  $\mathbf{K}_0$  和质量矩阵  $\mathbf{M}_0$ ,以及载荷向量  $\mathbf{f}_0$ .将这个扇区的节点位移向量分为 3 组,记为

$$\bar{\delta}_k = \begin{Bmatrix} \delta_{kt} \\ \delta_{kg} \\ \delta_{kt'} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中下标  $k$  表示第  $k$  个扇区,  $t$  表示主边界,  $t'$  表示从边界,  $g$  表示内部节点.包含主、从两个边界的扇区称为扩充扇区,只包含主边界的扇区称为基本扇区<sup>[9]</sup>.在周期对称的求解中,都是以基本扇区为研究对象的,而一般情况下只能通过有限元软件前处理器得到的扩充扇区的有限元矩阵.因此必须建立从扩充扇区到基本扇区的转换关系.根据结构对称性,在局部的柱坐标系下,节点位移的转换关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} \delta_{kt} \\ \delta_{kg} \\ \delta_{kt'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I}e^{i\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{kt} \\ \delta_{kg} \end{Bmatrix} \quad r = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

其中  $i$  为虚数单位,  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$  为每个扇区所对应的角度,  $r$  为对应的节径数.式(2)可简写为

$$\bar{\delta}_k = \mathbf{S}_r \delta_k \quad (3)$$

则基本扇区的刚度和质量矩阵可由下面的公式得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pr} &= \mathbf{S}_r^H \mathbf{K}_0 \mathbf{S}_r \\ \mathbf{M}_{pr} &= \mathbf{S}_r^H \mathbf{M}_0 \mathbf{S}_r \end{aligned} \quad r = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

其中上标  $H$  表示共轭转置,  $\mathbf{K}_0$  和  $\mathbf{M}_0$  的分块表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tg} & \mathbf{K}_{tt'} \\ \mathbf{K}_{gt} & \mathbf{K}_{gg} & \mathbf{K}_{gt'} \\ \mathbf{K}_{t't} & \mathbf{K}_{t'g} & \mathbf{K}_{t't'} \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{M}_{tg} & \mathbf{M}_{tt'} \\ \mathbf{M}_{gt} & \mathbf{M}_{gg} & \mathbf{M}_{gt'} \\ \mathbf{M}_{t't} & \mathbf{M}_{t'g} & \mathbf{M}_{t't'} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

基本扇区的刚度和质量矩阵可以分块表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{t't'} + \mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{t't}e^{i\alpha} + \mathbf{K}_{t't}e^{-i\alpha} & \mathbf{K}_{tg} + \mathbf{K}_{t'g}e^{-i\alpha} \\ \mathbf{K}_{gt} + \mathbf{K}_{g't}e^{i\alpha} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{pr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{t't'} + \mathbf{M}_{tt} + \mathbf{M}_{t't}e^{i\alpha} + \mathbf{M}_{t't}e^{-i\alpha} & \mathbf{M}_{tg} + \mathbf{M}_{t'g}e^{-i\alpha} \\ \mathbf{M}_{gt} + \mathbf{M}_{g't}e^{i\alpha} & \mathbf{M}_{gg} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

### 1.2 矩阵生成流程

在 ANSYS 得到的系统矩阵中,为了减小刚度矩阵的带宽,节点并不是按照主边界、内部节点和从边界的顺序排列,因此必须对式(3)和(4)中的转换矩阵  $\mathbf{S}_r$  进行初等变换.这里通过式(2)的

对应关系,采用三元表的形式来表示稀疏矩阵  $S_r(r=0)$ . 具体的生成过程如表1所示.

表1  $S_r$  生成过程的伪代码  
Table 1 Pseudo code for generating  $S_r$

| 行号 | 伪代码说明                                                                                                                   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 准备节点文件,扩充扇区节点编号向量为 $n_a$ ,<br>基本扇区为 $n_b$ ,周期对称边界为 $[n_l, n_h]$ ,<br>记 $n = \text{length}(n_a), m = \text{length}(n_l)$ |
| 2  | 开辟 $S_r$ 的存储空间, $S_r = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , $ja=0, jb=0$                                             |
| 3  | for $i=1:n$                                                                                                             |
| 4  | for $j=1:m$                                                                                                             |
| 5  | if $n_a(i) = n_l(j, 1)$ , $ja = ja + 1$                                                                                 |
| 6  | for $k=1:n-m$                                                                                                           |
| 7  | if $n_h(j, 2) = n_b(k)$                                                                                                 |
| 8  | $a(ja, 1:3) = [i, k, 1]$                                                                                                |
| 9  | end                                                                                                                     |
| 10 | end                                                                                                                     |
| 11 | for $kk=jb+1:n-m$                                                                                                       |
| 12 | if $n_a(i) = n_b(kk)$ , $jb = jb + 1$                                                                                   |
| 13 | $b(jb, 1:3) = [i, kk, 1]$                                                                                               |
| 14 | end                                                                                                                     |
| 15 | end                                                                                                                     |

关于伪代码的说明(数字表示表中对应的行号):

1 周期对称边界节点编号矩阵  $[n_l, n_h]$  中,同一行中的两个节点编号分别对应主边界和从边界上的轴向和径向位置相同的节点,  $n_l$  为从边界,  $n_h$  为主边界.

2  $S_r$  为从扩充扇区到基本扇区的稀疏矩阵,这里采用三元表的形式表示,  $ja$  和  $jb$  为计数器. 矩阵子块  $a$  表示随节径数变化的部分, 矩阵子块  $b$  表示不随节径数变化的部分. 当节径数为  $r$  时,  $a$  对应的元素需要乘以  $e^{i\omega t}$ .

3~5 按照扩充扇区的节点循环,按照其与基本扇区的对应关系给  $S_r$  赋值.

4~10 若为从边界上的节点,则寻找与其对应的主边界节点及其在基本扇区的位置.

11~14 若为内部节点,则直接寻找其在基本扇区的位置.

### 1.3 考虑预应力的刚度矩阵

转子叶盘工作转速下的离心力对结构的动态

特性产生明显的影响,在多数情况下必须考虑转速造成的预应力的影响. 实际上,叶盘振动过程中产生的动应力也会对结构的刚度矩阵产生影响,即系统的考虑预应力的刚度矩阵是时变的,瞬态求解中需要在每个时间步都更新刚度矩阵. 但与工作转速下的离心应力相比,动应力对刚度矩阵的影响一般相对较小,因此,在简化情况下,可以只考虑离心应力的影响. 这样,在瞬态求解过程中刚度矩阵是不变的,减小了求解的困难.

与不考虑预应力的情况相比,由于必须在周期对称边界上施加适当的边界条件(或在 ANSYS 中定义周期对称条件)才能得到预应力刚度矩阵,因此不能再直接应用边界自由的单扇区有限元模型得到扩充扇区的刚度矩阵  $K_0$ .

这里,首先施加  $r=0$  的位移约束,在离心载荷下进行静力分析,得到考虑预应力的单元刚度矩阵. 接着移除两周期对称面上的位移约束条件,只保留结构中的位移边界条件,输出系统的刚度矩阵,即为考虑预应力的  $K_0$ . 采用1.2节中所述的方法得到转换矩阵  $S_r$ ,进而得到各节径下刚度和质量矩阵.

## 2 叶盘结构激励的处理

### 2.1 叶盘结构中激励的特点

在转速稳定的情况下,转子叶盘结构的各扇区在旋转一周的过程中所受的激励的时间历程是一样的,只存在一个固定的时间差. 因此只需要知道一个扇区的激励,就可以根据时间关系推导出其他扇区的激励.

根据叶盘结构所受激励在时间上的周期性,可以将任意时刻各扇区相应节点的激励转换到同一激励周期  $T$  内,以方便后面的空间 Fourier 变换. 在实际应用中,  $T$  一般为转子扫过一个流道或是转过一周(静子叶片非对称分布的情况)的时间. 瞬态分析中,在积分时间  $t$ , 所研究扇区(有限元模型的基本扇区)给定的某一自由度上的激励为  $f(t)$ , 则整个叶盘相应自由度上的激励向量为

$$\mathbf{F}(t) =$$

$$\{f(t) \quad f(t+\Delta t) \quad \cdots \quad f(t+(N-1)\Delta t)\}^T \quad (7)$$

其中  $\Delta t = \frac{60}{\omega N}$  为相邻扇区间激励的时间差,  $\omega$  为转速(r/min).

在周期  $T$  内,给定时间点上时间  $t$  与由计算流体动力学(CFD)计算或是实验得到的激励

$f(t)$  是一一对应的,为了方便地通过插值得到任意时刻的各扇区的激励值,需要将式(7)中的各个时间值变换至同一周期内

$$t_{pj} = t_j - \left[ \frac{t_j}{T} \right] \times T \quad (8)$$

其中 $[\cdot]$ 表示取整.这样,通过对时间插值可以得到 $t$ 时刻的激励向量

$$\mathbf{F}(t) = \{f(t_{p1}) \quad f(t_{p2}) \quad \cdots \quad f(t_{pN})\}^T \quad (9)$$

## 2.2 激励的 Fourier 展开

对于如式(9)所示的沿周向分布的载荷,需要对其进行 Fourier 展开,以得到应用于周期对称有限元模型的各节径下的载荷. $\mathbf{F}(t)$  中第 $j$ 个扇区对应的激励的 Fourier 展开为

$$f_j(t) = \sum_{r=1}^N P_r(t) e^{-i(j-1)(2\pi r/N)} \quad (10)$$

其中 $P_r(t)$ 是该时刻 $r$ 节径下的载荷分量.式(10)可以写成如下的矩阵的形式

$$\mathbf{F}(t) = \Phi \mathbf{P}_r(t) \quad (11)$$

其中转换矩阵 $\Phi$ 中的元素为

$$\Phi(p, q) = e^{-i2\pi(p-1)(q-1)/N} \quad (12)$$

由式(11)和(12)可得

$$\mathbf{P}_r(t) = \frac{1}{N} \Phi^H \mathbf{F}(t) \quad (13)$$

## 3 瞬态分析求解流程

### 3.1 方程系统的建立和求解

在得到叶盘结构周期对称模型的有限元矩阵和激励之后,瞬态响应的求解方程为

$$\mathbf{M}_{pr} \ddot{\mathbf{x}}_{pr}(t) + \mathbf{C}_{pr} \dot{\mathbf{x}}_{pr}(t) + \mathbf{K}_{pr} \mathbf{x}_{pr}(t) = \mathbf{P}_r(t), \quad r = 0, 1, \dots, N-1 \quad (14)$$

其中 $\mathbf{x}_{pr}$ 是基本扇区的 $r$ 节径下的位移向量.那么,基本扇区的位移向量 $\mathbf{x}$ 可以表示为

$$\mathbf{x}_p = \sum_{r=0}^{N-1} \mathbf{x}_{pr} \quad (15)$$

当 $r_1 + r_2 = N$ 时,下标分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 的矩阵是互为共轭转置的,因此有

$$\mathbf{x}_{pr_1} = \bar{\mathbf{x}}_{pr_2} \quad (16)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}$ 表示取共轭.于是,并不需要求解式(14)中的所有 $N$ 个方程,当 $N$ 为奇数时,只要求解 $r =$

$0, 1, \dots, \frac{1}{2}(N-1)$ , 当 $N$ 为偶数时,只要求解 $r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$ 对应的方程.

这样,把一个大规模(整体模型)的实系数线

性方程组的求解问题转化成求解一系列小规模(扇区模型)的复系数线性方程组( $0$ 节径的仍为实系数,扇区数为偶数的 $\frac{N}{2}$ 节径也为实系数),从而达到提高计算效率的目的.

需要指出的是,对于叶盘结构中常见的行波激励或少数几个激励阶次的叠加,其空间 Fourier 变换得到的 $\mathbf{P}(t)$ 中的某些项为零,此时,需要求解的方程数目将进一步减少.

式(14)中的矩阵和激励向量都是复数表达的,将其实部、虚部分离,可以得到实系数的线性方程组以方便求解.这里,选取多波前法(multi-frontal)作为稀疏线性方程组的直接求解方法<sup>[14-15]</sup>.

通过求解各个 $r$ 所对应的方程(14),并结合式(15)和(16),以及不同扇区间的位移关系,可知,当 $N$ 为奇数时,第 $j$ 个扇区的节点位移向量为

$$\mathbf{x}_{jp} = \mathbf{x}_{p0} + \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}(N-1)} [\mathbf{x}_{pr} e^{-i(j-1)(2\pi r/N)} + \bar{\mathbf{x}}_{pr} e^{i(j-1)(2\pi r/N)}] \quad (17)$$

当 $N$ 为偶数时

$$\mathbf{x}_{jp} = \mathbf{x}_{p0} + (-1)^{j+1} \mathbf{x}_{pN/2} + \sum_{r=1}^{\frac{N}{2}-1} [\mathbf{x}_{pr} e^{-i(j-1)(2\pi r/N)} + \bar{\mathbf{x}}_{pr} e^{i(j-1)(2\pi r/N)}] \quad (18)$$

### 3.2 应用 Newmark 法的瞬态响应求解流程

Newmark 法是结构动力学瞬态响应求解中最为常用的直接积分方法之一.在周期对称模型中,求解流程如表 2 所示.

关于伪代码的说明(数字表示表中对应的行号):

1 为了减少基本扇区矩阵的重复计算,这里将 $\mathbf{K}_p$ 和 $\mathbf{M}_p$ 表示成随 $r$ 变换的 $\mathbf{K}_{p1}$ 和 $\mathbf{M}_{p1}$ ,以及不随 $r$ 变换的 $\mathbf{K}_{p2}$ 和 $\mathbf{M}_{p2}$ 两部分之和.需要指出的是,总体刚度矩阵只在柱坐标系下才表现出块状循环的特性,因此这里的矩阵均是在局部的柱坐标系下得到的.

2 由实验或计算得到的气动载荷数据,或是其他形式的激励.若采用强耦合的计算方式,则不能采用前面给出的时间插值方式得到扇区载荷,需要在每一个时间步进行载荷的转换处理.

3 若不为零初始条件,则也需要将非零的初始条件做空间 Fourier 变换,得到对应于各谐波次数 $r$ 的初始条件.

4 在给定步长  $\tau$  下求解  $c_0$  等积分常数.

5~18 时间推进求解.

6~9 各节点自由度上激励的时间插值以及空间 Fourier 变换.

10~16 根据节径数  $r$  依次求解.

14 采用多波前算法的数值求解软件包 UMFPACK 求解线性方程组.

表2 Newmark 法流程

Table 2 Procedure for Newmark method

| 行号 | 伪代码说明                                                                                                         |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 得到基本扇区的矩阵 $\mathbf{K}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{S}_r$ , 计算 $\mathbf{K}_{p2}$ 和 $\mathbf{M}_{p2}$               |
| 2  | 得到一个周期 $T$ 内激励和时间的关系 $(T_i, Ex)$                                                                              |
| 3  | 给定并处理初始条件 $\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0), \ddot{\mathbf{x}}(t_0)$                                    |
| 4  | 选择时间步长 $\tau$ , 并计算积分常数                                                                                       |
| 5  | for $i=1:n\_stp$                                                                                              |
| 6  | for $k=1:node\_ex$                                                                                            |
| 7  | $\mathbf{F}(k,:) = \text{interp1}(t_k, T_i, Ex)$                                                              |
| 8  | $\mathbf{P}_r^*(i\tau) = \frac{1}{N} \Phi^H \mathbf{F}(k,:)^T$                                                |
| 9  | end                                                                                                           |
| 10 | for $r=1:\left[\frac{N}{2}\right]+1$                                                                          |
| 11 | $\mathbf{K}_{pr} = \mathbf{K}_{pr1} + \mathbf{K}_{p2}, \mathbf{M}_{pr} = \mathbf{M}_{pr1} + \mathbf{M}_{p2},$ |
| 12 | $\mathbf{C}_{pr} = \alpha \mathbf{K}_{pr} + \beta \mathbf{M}_{pr}$                                            |
| 13 | $\mathbf{K}_{er} = \mathbf{K}_{pr} + \alpha_0 \mathbf{M}_{pr} + \alpha_1 \mathbf{C}_{pr}$                     |
| 14 | 计算 $\mathbf{Q}_r$                                                                                             |
| 15 | call $\mathbf{x}_{pr}((i+1)\tau) = \text{UMFPACK}(\mathbf{K}_{er}, \mathbf{Q}_r)$                             |
| 16 | 计算 $\dot{\mathbf{x}}_{pr}((i+1)\tau), \ddot{\mathbf{x}}_{pr}((i+1)\tau)$                                      |
| 17 | end                                                                                                           |
| 18 | 根据式(17)和(18)计算 $\mathbf{x}_{jp}$                                                                              |
| 19 | end                                                                                                           |

## 4 算例

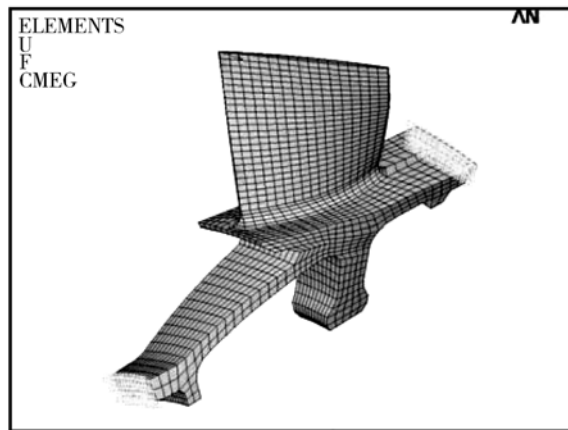
本文采用一个压气机整体叶盘结构作为验证模型,该叶盘有 23 个叶片,采用 8 节点六面体单元,其有限元模型如图 1 所示.单扇区模型和整体模型的比较如表 3 所示,从表中可以看出,整体模

表3 有限元模型规模比较

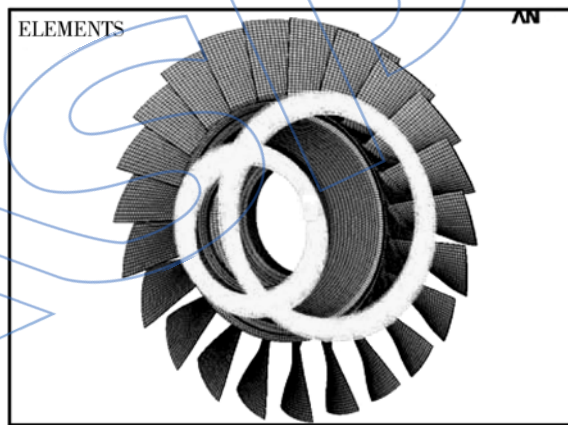
Table 3 Comparison of full and sector finite element model

|    | 单元数   | 节点数    | 刚度矩阵/MB |
|----|-------|--------|---------|
| 整体 | 79166 | 109618 | 343.48  |
| 扇区 | 3442  | 5049   | 15.24   |

型的节点数是扇区模型的 21.7 倍,刚度矩阵所需的内存空间是扇区模型的 22.5 倍.因此,采用周期对称模型大大减小了计算模型的规模.



(a) 周期对称模型



(b) 整体模型

图1 叶盘结构的有限元模型

Fig. 1 Finite element models of the example bladed disk

这里,考虑两种激励形式的情况,一种是单扇区激励,另外一种为行波激励.计算中考虑了离心预应力的影响,取激励频率  $\omega=2714$  Hz.

### 4.1 单扇区激励的情况

将一轴向激励施加到叶片顶端的节点上,在  $t$  时刻,各扇区的激励可以表示为

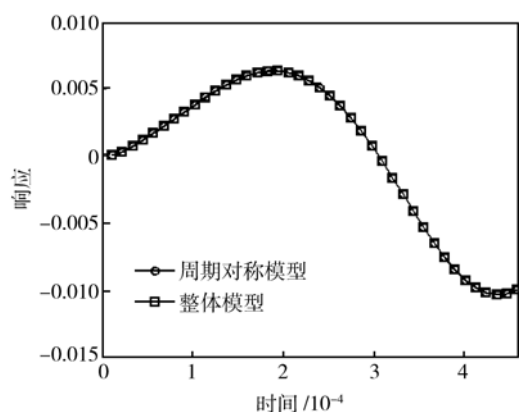
$$\mathbf{F}(t) = \{\sin(\omega t) \quad 0 \quad \cdots \quad 0\}^T \quad (19)$$

转换为各节径的激励,表示为

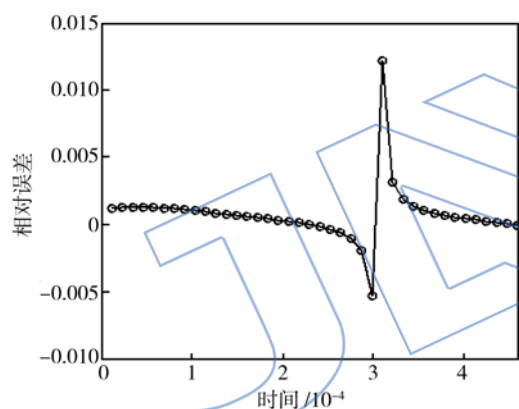
$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{N} \Phi^H \mathbf{F}(t) = \frac{\sin(\omega t)}{N} \{1 \quad \cdots \quad 1\}^T \quad (20)$$

$\mathbf{P}(t)$  的第  $r$  个元素对应于 Fourier 级数为  $r$  时该

节点的激励. 周期对称与整体模型的计算结果对比如图 2 所示, 从计算结果可以看出, 两种模型得到的计算结果是一致的. 需要注意的是, 当时间为  $3.0 \times 10^{-4}$  附近, 相对误差较大, 约为 1.2%, 这是因为此时位移接近于 0, 在求解相对误差时分母很小所造成的.



(a) 响应结果



(b) 相对误差

图 2 单扇区激励的响应结果

Fig. 2 Response results under single sector excitation

## 4.2 行波激励的情况

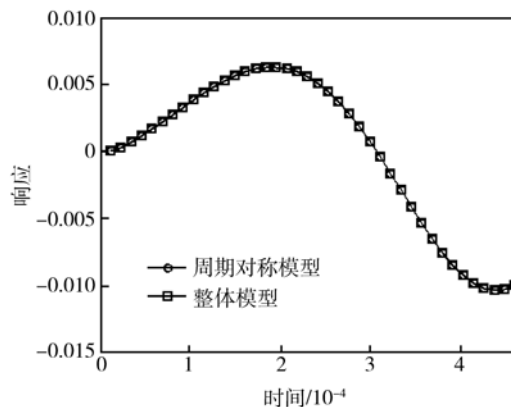
考虑激励阶次为 0 的行波激励  $F(t)$ , 即在任意时刻, 各扇区的激励是相同的. 需要指出的是, 由于  $P(t)$  中只有第一项不为零, 因此只需求解  $r = 0$  对应的方程, 相应地, 位移结果叠加过程也得到简化.

$$F(t) = \{\sin(\omega t) \quad \sin(\omega t) \quad \cdots \quad \sin(\omega t)\}^T \quad (21)$$

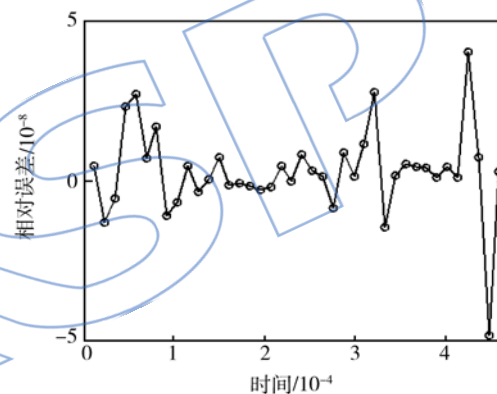
则

$$P(t) = \frac{1}{N} \Phi^H F(t) = \{\sin(\omega t) \quad 0 \quad \cdots \quad 0\}^T \quad (22)$$

周期对称模型和整体模型得到计算结果如图 3 所示, 与单点激励的情况相同, 两种模型的计算结果也是一致的.



(a) 响应结果



(b) 相对误差

图 3 行波激励的响应结果

Fig. 3 Response results under traveling wave excitation

对于上面的两个算例, 整体模型每个时间步平均消耗 CPU 时间为 346 s, 而周期对称模型每个时间步平均消耗 CPU 时间为 44 s, 计算效率大大提高. 对于 0 阶次的行波激励, 由于每个时间步只需求解一个小规模的实系数方程组, 平均消耗 CPU 时间仅为 1 s 左右.

## 5 结 论

本文提出了利用结构周期对称性计算谐调叶盘结构瞬态响应的方法, 并给出了响应的计算流程. 求解的过程主要分为有限元矩阵转换, 激励的空间 Fourier 分析和方程求解及后处理等几个部分. 文中通过一个具有复杂几何形状的叶盘结构的作为算例说明了方法的应用流程; 计算表明, 采用周期对称模型得到的响应结果与整体模型的结

果一致,验证了文中提出方法的正确性.

算例表明,采用周期对称模型能够大幅度减小叶盘结构的计算规模,大量节省计算所需的内存空间,同时也能大大提高计算效率.对于文中的有23个叶片的叶盘算例,刚度矩阵规模减小20多倍,计算效率提高了将近8倍.

需要说明的是,文中提出的方法目前仅能适用于谐调的叶盘结构,对于各叶片的材料属性、尺寸、动力特性等具有差别的失谐叶盘结构,需要进一步改进该方法或者只能采用整体叶盘进行计算.

### 参考文献:

- [1] 王勖成,邵敏.有限单元法基本原理和数值方法[M].北京:清华大学出版社,1997.
- [2] Thomas D L. Dynamics of rotationally periodic structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979, 14(1): 81-102.
- [3] Fricker A J, Potter S. Transient forced vibration of rotationally periodic structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981, 17(7): 957-974.
- [4] Williams F W. An algorithm for exact eigenvalue calculations for rotationally periodic structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23(4): 609-622.
- [5] Omprakash V, Ramamurti V. Coupled natural frequencies of rotating tuned bladed disk systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 140(3): 413-435.
- [6] Zhang J, Chen X J, Wang W L. Dynamic analysis technique of rotating centrifugal impeller [R]. ASME 91-GT-50, 1991.
- [7] 张锦,陈向均,王文亮.转动盘-片系的循环对称模综[J].固体力学学报,1992,13(3):225-234.
- ZHANG Jin, CHEN Xiangjun, WANG Wenliang. Cyclo-symmetric modal synthesis of rotating bladed disc system [J]. ACTA Mechanica Solida Sinica, 1992, 13(3): 225-234. (in Chinese)
- [8] Zhang J, Wang W L, Chen X J, et al. Dynamic analysis of annular cascade structures[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 1993, 6(1): 37-41. (in Chinese)
- [9] 张锦,刘晓平.叶轮机振动模态分析理论及数值方法[M].北京:国防工业出版社,2001.
- [10] Seeley C E, Dede M, Mignolet M. Analysis of cyclic symmetric structures with mistuned sectors[R]. AIAA-2002-1536, 2002.
- [11] Petrov E P. A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks[J]. Journal of Turbomachinery, 2004, 126(1): 175-183.
- [12] Yang M T, Griffin J H. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2001, 123(4): 893-900.
- [13] Feiner D M, Griffin J H. A fundamental model of mistuning for a single family of modes[J]. Journal of Turbomachinery, 2002, 123(4): 597-605.
- [14] Balasubramanian P, Jagadeesh J G, Suhas H K, et al. Some studies on free vibration analysis of cyclic symmetric structures using subspace method [J]. Engineering Computations, 1993, 10(3): 279-286.
- [15] Davis T A. Algorithm 832: UMFPACK V4. 3—An unsymmetric-pattern multifrontal method [J]. ACM Trans. Math. Softw., 2004, 30(2): 196-199.